11. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz la recta $x + 5 = 0$.

12. Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje X pasa por el punto $(-2, 4)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto.

13. Una cuerda de la parábola $y^2 - 4x = 0$ es un segmento de la recta $x - 2y + 3 = 0$. Hallar su longitud.

14. Hallar la longitud de la cuerda focal de la parábola $x^2 + 8y = 0$ que es paralela a la recta $3x + 4y - 7 = 0$.

15. Demostrar que la longitud del radio vector de cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la parábola $y^2 = 4px$ es igual a $|x_1 + p|$.

16. Hallar la longitud del radio vector del punto de la parábola $y^2 - 9x = 0$ cuya ordenada es igual a 6.

17. De un punto cualquiera de una parábola se traza una perpendicular al eje. Demostrar que esta perpendicular es media proporcional entre el lado recto y la porción del eje comprendida entre el vértice y el pie de la perpendicular.

18. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el vértice y los puntos extremos del lado recto de la parábola $x^2 - 4y = 0$.

faltó

19. Los extremos del lado recto de una parábola cualquiera se unen con el punto de intersección del eje con la directriz. Demostrar que estas rectas son perpendiculares entre sí.

20. Una circunferencia cuyo centro es el punto $(4, -1)$ pasa por el foco de la parábola $x^2 + 16y = 0$. Demostrar que es tangente a la directriz de la parábola.

21. Hallar la ecuación de una parábola tomando como ejes X y Y, el eje y la directriz respectivamente.

En cada uno de los ejercicios 22-25, aplicando la definición de la parábola, hallar la ecuación de la parábola a partir de los datos dados. Reducir la ecuación a la primera forma ordinaria por transformación de coordenadas.

22. Foco $(3, 4)$, directriz $x - 1 = 0$.
23. Foco $(3, -5)$, directriz $y - 1 = 0$.
24. Vértice $(2, 0)$, foco $(0, 0)$.
25. Foco $(-1, 1)$, directriz $x + y - 5 = 0$.

56. Ecuación de una parábola de vértice (h, k) y eje paralelo a un eje coordenado. Frecuentemente necesitaremos obtener la ecuación de una parábola cuyo vértice no esté en el origen y cuyo eje sea paralelo, y no necesariamente coincidente, a uno de los ejes coordenados. De acuerdo con esto, consideremos la parábola (fig. 79) cuyo vértice es el punto (h, k) y cuyo eje es paralelo al eje X. Si los ejes coordenados son trasladados de tal manera que el nuevo origen O' coincida con el vértice (h, k), se sigue, por el teorema 1 del Artículo 55, que la ecuación de la parábola con referencia a los nuevos ejes X' y Y' está dada por

$$y'^2 = 4px', \qquad (1)$$

que pueden escribirse así,

$$\begin{cases} \frac{3}{2}D' - E' + F' = -1, \\ 5E' + F' = -25, \\ 6D' + 7E' - F' = 49. \end{cases}$$

La solución de este sistema de tres ecuaciones nos da

$$D' = 8, \quad E' = -2, \quad F' = -15.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (8), obtenemos

$$y^2 + 8x - 2y - 15 = 0.$$

que es la ecuación de la parábola que se buscaba.

El estudiante debe dibujar la figura para este ejemplo y verificar el hecho de que las coordenadas de cada uno de los tres puntos dados satisfacen la ecuación de la parábola. También debe obtener la misma ecuación usando la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h).$$

EJERCICIOS. Grupo 24

Dibujar para cada ejercicio la figura correspondiente.

1. Deducir y discutir la ecuación ordinaria $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.

2. Por transformación de coordenadas, reducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria a las dos formas correspondientes de la primera ecuación ordinaria de la parábola.

3. Demostrar que si se tiene la ecuación de la parábola en la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, las coordenadas de su foco son $(h + p, k)$, y la ecuación de su directriz es $x = h - p$.

4. Demostrar que si se tiene la ecuación de una parábola en la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, las coordenadas de su foco son $(h, k + p)$, y la ecuación de su directriz es $y = k - p$.

5. Por medio de la primera ecuación ordinaria, deducir la siguiente propiedad geométrica de la parábola: Si desde un punto cualquiera de una parábola se baja una perpendicular a su eje, el cuadrado de la longitud de esta perpendicular es igual al producto de las longitudes de su lado recto y del segmento del eje comprendido entre el pie de dicha perpendicular y el vértice. Toda parábola, cualquiera que sea su posición relativa a los ejes coordenados, posee esta propiedad geométrica llamada *propiedad intrínseca* de la parábola.

6. Por medio de la propiedad intrínseca de la parábola, establecida en el ejercicio 5, deducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria de dicha curva.

7. Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos $(-4, 3)$ y $(-1, 3)$, respectivamente. Hallar también las ecuaciones de su directriz y su eje.

8. Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos (3, 3) y (3, 1), respectivamente. Hallar también la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

9. La directriz de una parábola es la recta $y - 1 = 0$, y su foco es el punto $(4, -3)$. Hallar la ecuación de la parábola por dos métodos diferentes.

10. La directriz de una parábola es la recta $x + 5 = 0$, y su vértice es el punto (0, 3). Hallar la ecuación de la parábola por dos métodos diferentes.

En cada uno de los ejercicios 11-15, redúzcase la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la parábola, y hallar las coordenadas del vértice y del foco, las ecuaciones de la directriz y eje, y la longitud del lado recto.

11. $4y^2 - 48x - 20y = 71$.

12. $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$.

13. $y^2 + 4x = 7$.

14. $4x^2 + 48y + 12x = 159$.

15. $y = ax^2 + bx + c$.

16. Resolver el ejemplo 2 del Artículo 56 trasladando los ejes coordenados.

17. Resolver el ejercicio 14 trasladando los ejes coordenados.

18. Discutir la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando $A = E = F = 0$ y $C \neq 0$, $D \neq 0$.

19. Resolver el ejemplo 3 del Artículo 56 tomando la ecuación en la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$.

20. Hallar las coordenadas del foco y el vértice, las ecuaciones de la directriz y el eje, y la longitud del lado recto de la parábola del ejemplo 3 del Artículo 56.

21. Determinar la ecuación de la familia de parábolas que tienen un foco común (3, 4) y un eje común paralelo al eje Y.

22. La ecuación de una familia de parábolas es $y = 4x^2 + 4x + c$. Discutir cómo varía el lugar geométrico cuando se hace variar el valor del parámetro c.

23. La ecuación de una familia de parábolas es $y = ax^2 + bx$. Hállese la ecuación del elemento de la familia que pasa por los dos puntos (2, 8) y $(-1, 5)$.

24. Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los tres puntos (0, 0), $(8, -4)$ y (3, 1).

25. Hallar la ecuación de la parábola de vértice el punto $(4, -1)$, eje la recta $y + 1 = 0$ y que pasa por el punto $(3, -3)$.

26. Demostrar, analíticamente, que cualquier recta paralela al eje de una parábola corta a ésta en uno y solamente en un punto.

27. Demostrar que la longitud del radio vector de cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la parábola $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ es igual a $|x_1 - h + p|$.

28. Hallar la longitud del radio vector del punto de la parábola

$$y^2 + 4x + 2y - 19 = 0$$

cuya ordenada es igual a 3.

29. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $x + 3 = 0$ es siempre 2 unidades mayor que su distancia del punto (1, 1).

30. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del centro de una circunferencia que es siempre tangente a la recta $y - 1 = 0$ y a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene $m = 2, -3$. Por tanto, por (6), las ecuaciones de las tangentes buscadas son

$$y + 4 = 2(x - 2) \quad \text{y} \quad y + 4 = -3(x - 2),$$

o sea,

$$2x - y - 8 = 0 \quad \text{y} \quad 3x + y - 2 = 0.$$

El estudiante debe dibujar la figura correspondiente a este problema.

EJERCICIOS. Grupo 25

Dibujar una figura para cada ejercicio.

En cada uno de los ejercicios 1-3 hallar las ecuaciones de la tangente y la normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para la parábola y el punto de contacto dados.

1. $y^2 - 4x = 0$; $(1, 2)$.
2. $y^2 + 4x + 2y + 9 = 0$; $(-6, 3)$.
3. $x^2 - 6x + 5y - 11 = 0$; $(-2, -1)$.

4. Por medio del teorema 4 (Art. 57) hallar la ecuación de la tangente del ejercicio 1.

5. Demostrar que la ecuación de la normal a la parábola $y^2 = 4px$ en $P_1(x_1, y_1)$ es $y_1 x + 2py = x_1 y_1 + 2py_1$.

6. Por medio del resultado del ejercicio 5, hallar la ecuación de la normal del ejercicio 1.

falto

7. Demostrar que las tangentes a una parábola en los puntos extremos de su lado recto son perpendiculares entre sí.

8. Demostrar que el punto de intersección de las tangentes del ejercicio 7 está sobre la directriz de la parábola. (Ver el ejercicio 19 del grupo 23, Art. 55.)

9. Hallar la ecuación de la tangente de pendiente -1 a la parábola $y^2 - 8x = 0$.

10. Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 + 4x + 12y - 8 = 0$ que es paralela a la recta $3x + 9y - 11 = 0$.

11. Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$ que es perpendicular a la recta $2x + y + 7 = 0$.

12. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $(-3, 3)$ a la parábola $y^2 - 3x - 8y + 10 = 0$.

13. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(1, 4)$ a la parábola $y^2 + 3x - 6y + 9 = 0$.

14. Del punto $(-1, -1)$, se trazan dos tangentes a las parábola

$$y^2 - x + 4y + 6 = 0.$$

Hallar el ángulo agudo formado por estas rectas.

15. Con referencia a la parábola $y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $x + 2y + k = 0$:

   a) cortan a la parábola en dos puntos diferentes;
   b) son tangentes a la parábola;
   c) no cortan a la parábola.

16. Hallar el ángulo agudo de intersección de la recta $x - y - 4 = 0$ y la parábola $y^2 = 2x$ en cada uno de sus puntos de intersección.

17. Hallar el ángulo agudo de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ y la parábola $x^2 - 4y - 4 = 0$ en uno cualquiera de sus dos puntos de intersección.

18. Demostrar que las parábolas $x^2 - 4x + 8y - 20 = 0$ y $x^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ son ortogonales entre sí en cada uno de sus puntos de intersección.

19. Desde el foco de una parábola se traza una recta perpendicular a una tangente cualquiera a la parábola. Demostrar que el punto de intersección de estas rectas está sobre la tangente a la parábola en el vértice.

20. Demostrar que la normal de pendiente m a la parábola $y^2 = 4px$ tiene por ecuación $y = mx - 2pm - pm^3$.

21. Demostrar que cualquier tangente a una parábola, excepto la tangente en el vértice, corta a la directriz y al lado recto (prolongado si es necesario) en puntos que son equidistantes del foco.

22. En cualquier punto P de una parábola, no siendo el vértice, la tangente y la normal cortan al eje de la parábola en los puntos A y B, respectivamente. Demostrar que los puntos A, B y P son equidistantes del foco.

23. Por medio del resultado del ejercicio 22, demuéstrese un procedimiento para trazar la tangente y la normal en cualquier punto de una parábola dada.

24. Demostrar que la tangente a la parábola $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, de pendiente m, tiene por ecuación $y = mx - mh + k + \frac{p}{m}$, $m \neq 0$.

25. Demostrar que toda circunferencia que tiene de diámetro una cuerda focal de una parábola, es tangente a la directriz.

26. Se han trazado dos círculos cada uno de los cuales tiene por diámetro una cuerda focal de una parábola. Demostrar que la cuerda común de los círculos pasa por el vértice de la parábola.

27. Si desde un punto exterior P se trazan tangentes a una parábola, el segmento de recta que une los puntos de contacto se llama *cuerda de contacto de* P para esa parábola (véase el ejercicio 25 del grupo 18, Art. 45). Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto exterior a la parábola $y^2 = 4px$, demuéstrese que la ecuación de la cuerda de contacto de P_1 es $y_1 y = 2p(x + x_1)$. (Ver el teorema 4, Art. 57.)

28. Demostrar que la cuerda de contacto de cualquier punto de la directriz de una parábola pasa por su foco.

Revis.

29. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas de una parábola es una recta paralela al eje. Esta recta se llama *diámetro* de la parábola.

30. Hallar la ecuación del diámetro de la parábola $y^2 = 16x$ para un sistema de cuerdas paralelas de pendiente 2.

58. La función cuadrática. La forma

$$ax^2 + bx + c, \qquad (1)$$

en donde, a, b y c son constantes y $a \neq 0$, se llama *función cuadrática* de x, o *trinomio de segundo grado*, y puede ser investigada por medio de la relación

$$y = ax^2 + bx + c. \qquad (2)$$